Introducción a las Redes Bayesianas

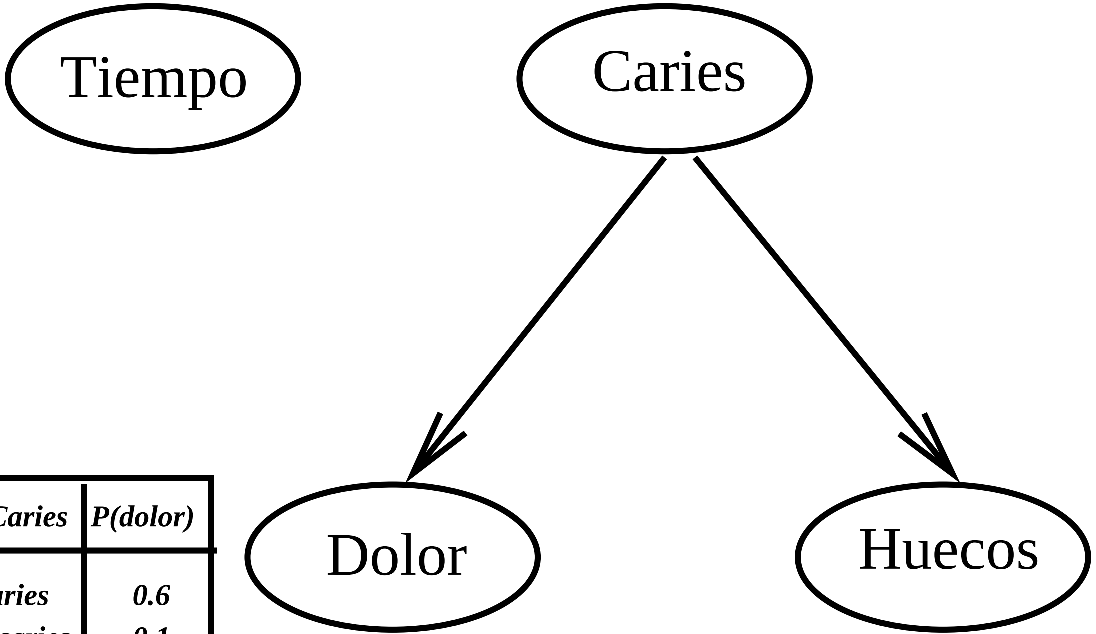
Redes bayesianas

- Como vimos en el tema anterior, las relaciones de independencia (condicional) nos permiten reducir el tamaño de la información necesaria para especificar una DCC
  - Las *redes bayesianas* (o *redes de creencia*) constituyen una manera práctica y compacta de representar el conocimiento incierto, basada en esta idea
- Una red bayesiana es un grafo dirigido *acíclico* que consta de:
  - Un conjunto de nodos, uno por cada variable aleatoria del "mundo"
  - Un conjunto de arcos dirigidos que conectan los nodos; si hay un arco de X a Y decimos que X es un ***padre*** de Y ($padres(X)$ denota el conjunto de v.a. que son padres de X)
  - Cada nodo X_i contiene la distribución de probabilidad condicional $\boldsymbol{P}(X_i|padres(X_i))$
- Intuitivamente, en una red bayesiana una arco entre X e Y significa ***una influencia directa*** de X sobre Y
  - Es tarea del experto en el dominio el decidir las relaciones de dependencia directa (es decir, la *topología* de la red)

Ejemplo de red bayesiana (Russell y Norvig)

P(sol)	P(lluv)	P(nubl)	P(nieve)
0.7	0.2	0.08	0.02

P(caries)
0.8



Caries	P(dolor)
caries	0.6
no caries	0.1

Caries	P(hueco)
caries	0.9
no caries	0.2

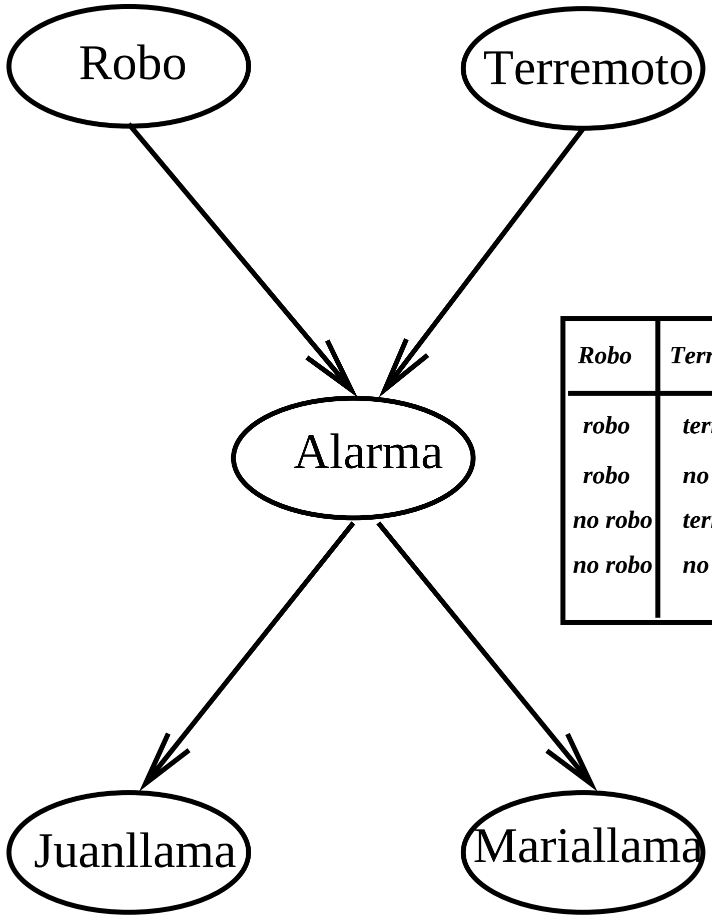
Observaciones sobre el ejemplo

- **La topología de la red anterior nos expresa que:**
  - $Caries$ **es una *causa directa* de** $Dolor$ **y** $Huecos$
  - $Dolor$ **y** $Huecos$ **son condicionalmente independientes dada** $Caries$
  - $Tiempo$ **es independiente de las restantes variables**
- **No es necesario dar la probabilidad de las negaciones de** $caries$, $dolor$, $\ldots$

Otro ejemplo (Pearl, 1990):

- **Tenemos una alarma antirrobo instalada en una casa**
  - La alarma salta normalmente con la presencia de ladrones
  - Pero también cuando ocurren pequeños temblores de tierra
- **Tenemos dos vecinos en la casa, Juan y María, que han prometido llamar a la policía si oyen la alarma**
  - Juan y María podrían no llamar aunque la alarma sonara: por tener música muy alta en su casa, por ejemplo
  - Incluso podrían llamar aunque no hubiera sonado: por confundirla con un teléfono, por ejemplo

Red bayesiana para el ejemplo de la alarma



P(robo)
0.001

P(terr)
0.002

Robo	*Terrem*	*P(alarma)*
robo	*terr*	*0.95*
robo	*no terr*	*0.94*
no robo	*terr*	*0.29*
no robo	*no terr*	*0.001*

Alarma	*P(juanll)*
alarma	*0.90*
no alarma	*0.05*

Alarma	*P(mariall)*
alarma	*0.70*
no alarma	*0.01*

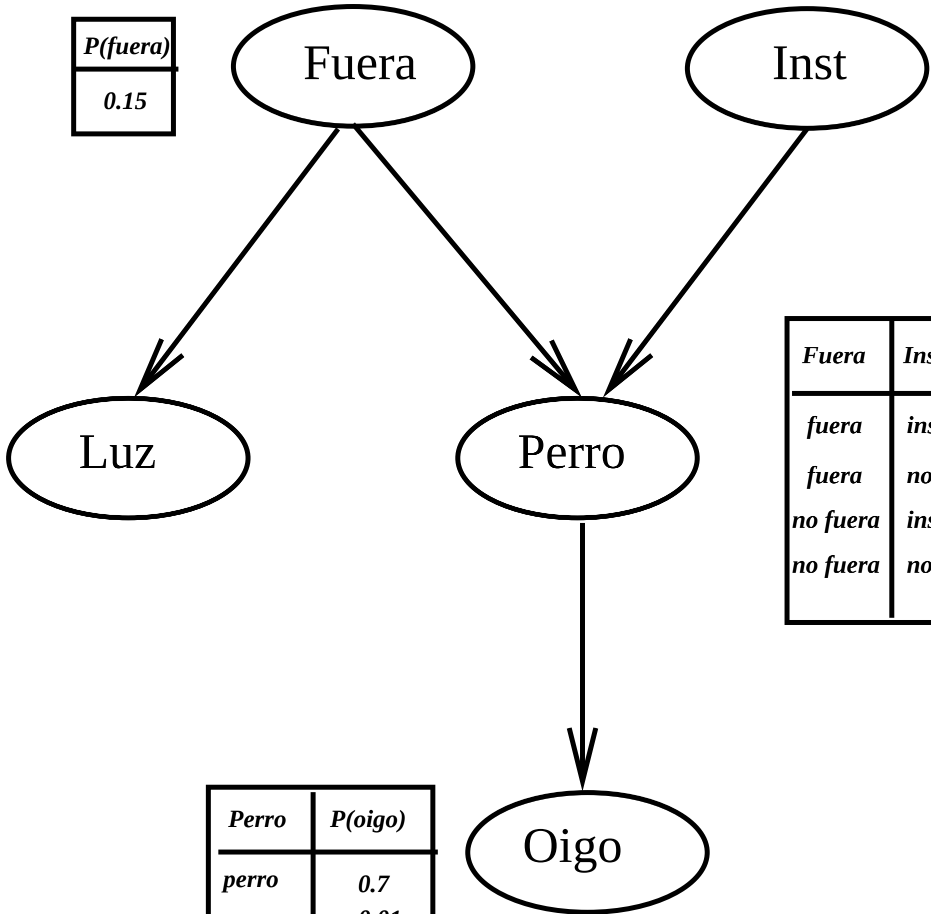
Observaciones sobre el ejemplo

- **La topología de la red nos expresa que:**
  - $Robo$ **y** $Terremoto$ **son causas directas para** $Alarma$
  - **También,** $Robo$ **y** $Terremoto$ **son causas para** $Juanllama$ **y para** $Mariallama$**, pero esa influencia sólo se produce a través de** $Alarma$**: ni Juan ni María detectan directamente el robo ni los pequeños temblores de tierra**
  - **En la red no se hace referencia directa, por ejemplo, a las causas por las cuales María podría no oír la alarma: éstas están implícitas en la tabla de probabilidades** $\boldsymbol{P}(Mariallama|Alarma)$

Un tercer ejemplo (Charniak, 1991):

- **Supongamos que quiero saber si alguien de mi familia está en casa, basándome en la siguiente información**
  - **Si mi esposa sale de casa, usualmente (pero no siempre) enciende la luz de la entrada**
  - **Hay otras ocasiones en las que también enciende la luz de la entrada**
  - **Si no hay nadie en casa, el perro está fuera**
  - **Si el perro tiene problemas intestinales, también se deja fuera**
  - **Si el perro está fuera, oigo sus ladridos**
  - **Podría oír ladridos y pensar que son de mi perro aunque no fuera así**
- **Variables aleatorias (booleanas) en este problema:**
  - $Fuera$ **(nadie en casa),** Luz **(luz en la entrada),** $Perro$ **(perro fuera),** $Inst$ **(problemas intestinales en el perro) y** $Oigo$ **(oigo al perro ladrar)**

Red bayesiana para el ejemplo de la familia fuera de casa



P(fuera)
0.15

P(inst)
0.01

Fuera	P(luz)
fuera	0.6
no fuera	0.05

Fuera	Inst	P(perro)
fuera	inst	0.99
fuera	no inst	0.90
no fuera	inst	0.97
no fuera	no inst	0.3

Perro	P(oigo)
perro	0.7
no perro	0.01

Las redes bayesianas representan DCCs

- **Consideremos una red bayesiana con n variables aleatorias**
  - **Y un orden entre esas variables:** $X_1, \ldots, X_n$
- **En lo que sigue, supondremos que:**
  - $padres(X_i) \subseteq \{X_{i-1}, \ldots, X_1\}$ **(para esto, basta que el orden escogido sea consistente con el orden parcial que induce el grafo)**
  - $\boldsymbol{P}(X_i|X_{i-1}, \ldots, X_1) = \boldsymbol{P}(X_i|padres(X_i))$ **(es decir, cada variable es condicionalmente independiente de sus anteriores, dados sus padres en la red)**
- **Estas condiciones expresan formalmente nuestra intuición al representar nuestro "mundo" mediante la red bayesiana correspondiente**
  - **En el ejemplo de la alarma, la red expresa que creemos que** $\boldsymbol{P}(Mariallama|Juanllama, Alarma, Terremoto, Robo) = \boldsymbol{P}(Mariallama|Alarma)$

Las redes bayesianas representan DCCs

- **En las anteriores condiciones, y aplicando repetidamente la regla del producto:**

$$\boldsymbol{P}(X_1,\ldots,X_n) = \boldsymbol{P}(X_n|X_{n-1}\ldots,X_1)\boldsymbol{P}(X_{n-1}\ldots,X_1) = \ldots$$

$$\ldots = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}(X_i|X_{i-1},\ldots,X_1) = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}(X_i|padres(X_i))$$

- **Es decir, una red bayesiana *representa una DCC* obtenida mediante la expresión $\boldsymbol{P}(X_1,\ldots,X_n) = \prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}(X_i|padres(X_i))$**
  - **Por ejemplo, en el ejemplo de la alarma, la probabilidad de que la alarma suene, Juan y María llamen a la policía, pero no haya ocurrido nada es (usamos iniciales, por simplificar) :**

$$P(j,m,a,\neg r,\neg t) = P(j|a)P(m|a)P(a|\neg r,\neg t)P(\neg r)P(\neg t) =$$

$$= 0{,}9 \times 0{,}7 \times 0{,}001 \times 0{,}999 \times 0{,}998 = 0{,}00062$$

Representaciones compactas

- **Dominios *localmente estructurados*:**
  - **Las relaciones de independencia que existen entre las variables de un dominio hacen que las redes bayesianas sean una representación mucho más compacta y eficiente de una DCC que la tabla con todas las posibles combinaciones de valores**
  - **Además, para un experto en un dominio de conocimiento suele ser más natural dar probabilidades condicionales que directamente las probabilidades de la DCC**
  - **Con n variables, si cada variable está directamente influenciada por k variables a lo sumo, entonces una red bayesiana necesitaría $n2^k$ números, frente a los 2^n números de la DCC**
  - **Por ejemplo, Para $n = 30$ y $k = 5$, esto supone 960 números frente a 2^30 (billones)**
- **Hay veces que una variable influye directamente sobre otra, pero esta dependencia es muy tenue**
  - **En ese caso, puede compensar no considerar esa dependencia, perdiendo algo de precisión en la representación, pero ganado manejabilidad**

Algoritmo de construcción de una red bayesiana

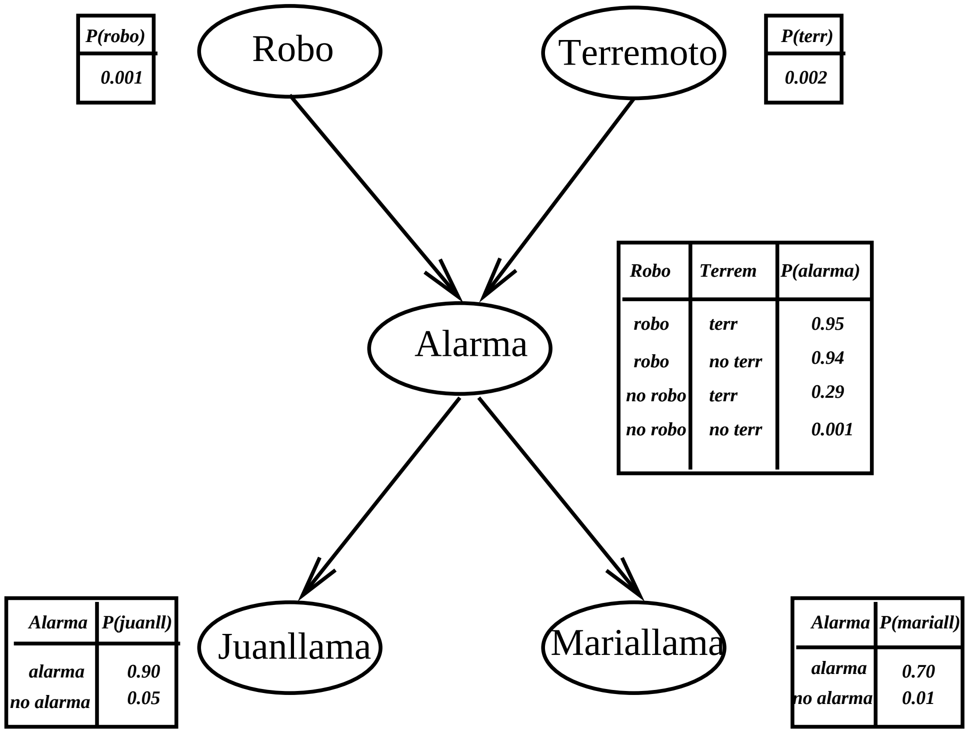
- **Supongamos dado un conjunto de variables aleatorias `VARIABLES` que representan un dominio de conocimiento (con incertidumbre)**

```
FUNCION CONSTRUYE_RED(VARIABLES)

1. Sea (X_1,...X_n) una ordenación de las variables de VARIABLES
2. Sea RED una red bayesiana ‘‘vacía’’
3. PARA i=1,...,n HACER
   3.1 Añadir un nodo etiquetado con X_i a RED
   3.2 Sea padres(X_i) un subconjunto minimal de {X_{i-1},...,X1}
       tal que existe una independencia condicional entre X_i y cada
       elemento de {X_{i-1},...,X1} dado padres(X_i)
   3.3 Añadir en RED un arco dirigido entre cada elemento de padres(X_i)
       y X_i
   3.4 Asignar al nodo X_i la tabla de probabilidad P(X_i|padres(X_i))
4. Devolver RED
```

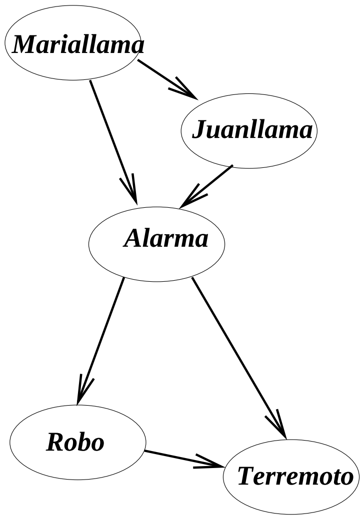
Ejemplo de construcción de red bayesiana (alarma)

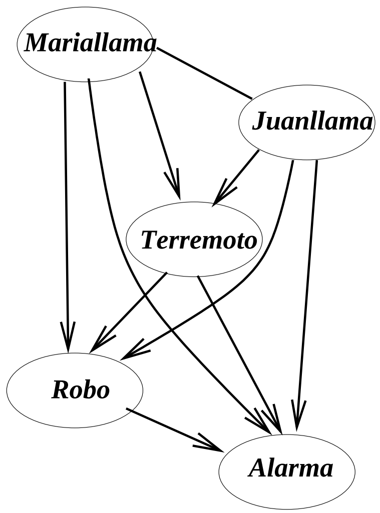
- **Partiendo del orden** *Robo*, *Terremoto*, *Alarma*, *Juanllama*, *Mariallama*, **y aplicando el algoritmo anterior obtenemos la red del ejemplo:**



Construcción de redes bayesianas

- **Problema: elección del orden entre variables**
  - **En general, deberíamos empezar por las "causas originales", siguiendo con aquellas a las que influencian directamente, etc..., hasta llegar a las que no influyen directamente sobre ninguna (modelo *causal*)**
  - **Esto hará que las tablas reflejen probabilidades "causales" más que "diagnósticos", lo cual suele ser preferible por los expertos**
- **Un orden malo puede llevar a representaciones poco eficientes**
  - **Red izquierda (*Mariallama*, *Juanllama*, *Alarma*, *Robo* y *Terremoto*); red derecha (*Mariallama*, *Juanllama*, *Terremoto*, *Robo* y *Alarma*)**





Inferencia probabilística en una red bayesiana

- **El problema de la inferencia en una red bayesiana**
  - **Calcular la probabilidad a posteriori para un conjunto de *variables de consulta*, dado que se han observado algunos valores para las *variables de evidencia***
  - **Por ejemplo, podríamos querer saber qué probabilidad hay de que realmente se haya producido un robo, sabiendo que tanto Juan como María han llamado a la policía**
  - **Es decir, calcular** $\boldsymbol{P}(Robo|juanllama, mariallama)$
- **Notación:**
  - X **denotará la variable de consulta (sin pérdida de generalidad supondremos sólo una variable)**
  - $\boldsymbol{E}$ **denota un conjunto de *variables de evidencia*** $E_1, E_2, \ldots, E_n$ **y** $\boldsymbol{e}$ **una observación concreta para esas variables**
  - $\boldsymbol{Y}$ **denota al conjunto de las restantes variables de la red (variables *ocultas*) e** $\boldsymbol{y}$ **representa un conjunto cualquiera de valores para esas variables**

Inferencia por enumeración

- Recordar la fórmula para la inferencia probabilística a partir de una DCC:

$$\boldsymbol{P}(X|\boldsymbol{e}) = \alpha \boldsymbol{P}(X, \boldsymbol{e}) = \alpha \sum_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{P}(X, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{y})$$

- Esta fórmula será la base para la inferencia probabilística:
  - Puesto que una red bayesiana es una representación de una DCC, nos permite calcular cualquier probabilidad a posteriori a partir de la información de la red bayesiana
  - Esencialmente, se trata de una suma de productos de los elementos de las distribuciones condicionales

Un ejemplo de inferencia probabilística

- **Ejemplo de la alarma (usamos iniciales por simplificar)**

$$\boldsymbol{P}(R|j,m) = \langle P(r|j,m), P(\neg r|j,m)\rangle = \alpha\langle \sum_t \sum_a P(r,t,a,j,m), \sum_t \sum_a P(\neg r,t,a,j,m)\rangle =$$

$$= \alpha\langle \sum_t \sum_a P(r)P(t)P(a|r,t)P(j|a)P(m|a), \sum_t \sum_a P(\neg r)P(t)P(a|\neg r,t)P(j|a)P(m|a)\rangle$$

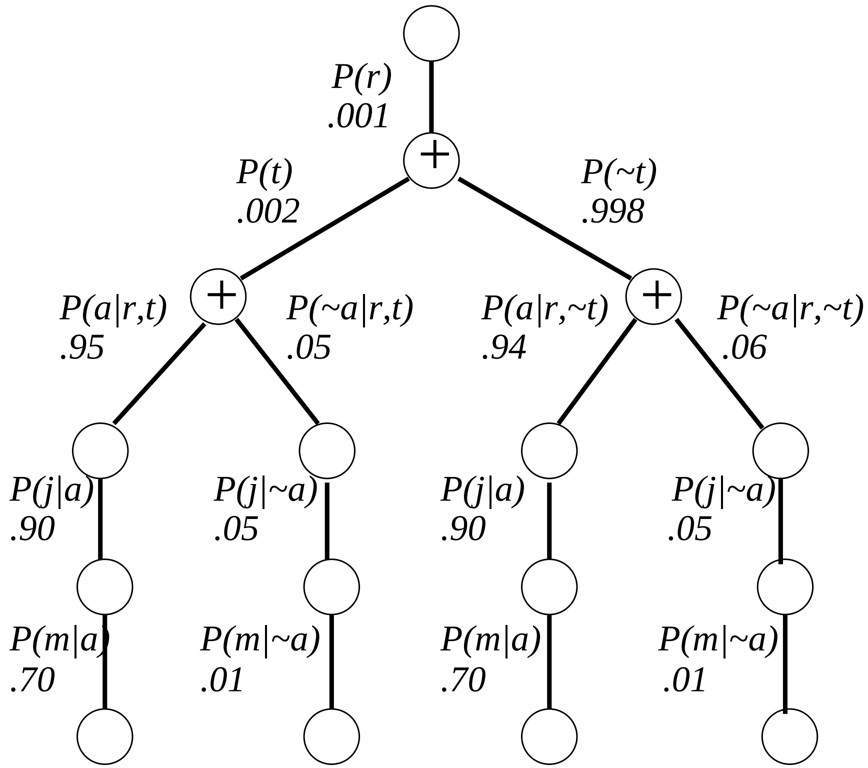
- **En este ejemplo hay que hacer 2×4 sumas, cada una de ellas con un producto de cinco números tomados de la red bayesiana**
  - **En el peor de los casos, con n variables booleanas, este cálculo toma $O(n2^n)$**
- **Una primera mejora consiste en sacar factor común de aquellas probabilidades que sólo involucran variables que no aparecen en el sumatorio:**

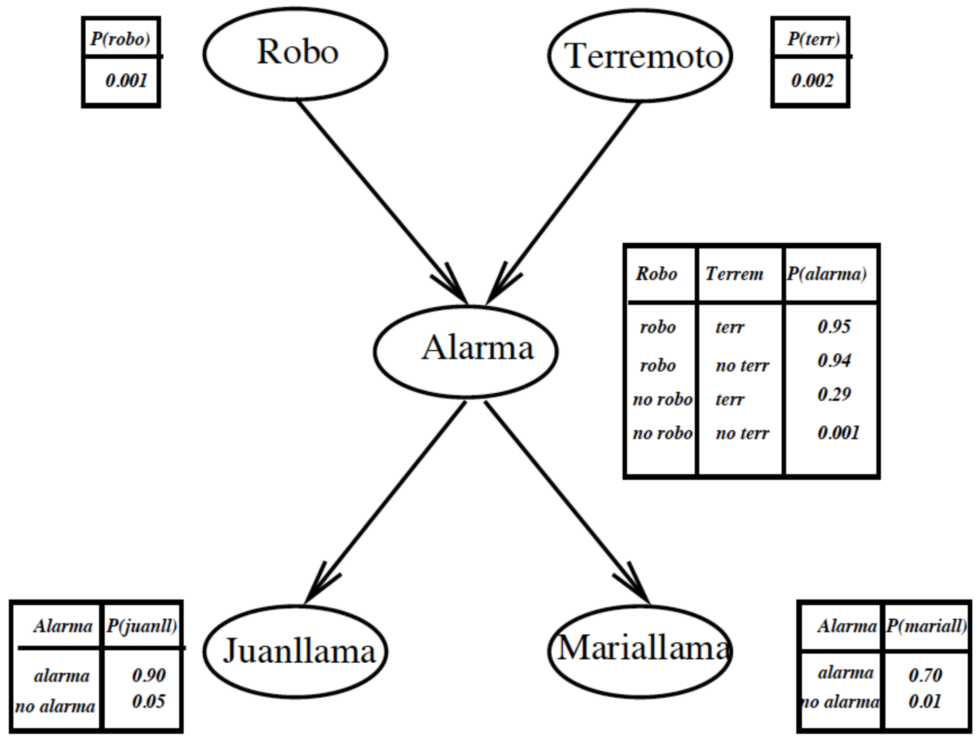
$$\boldsymbol{P}(R|j,m) = \alpha\langle P(r)\sum_t P(t)\sum_a P(a|r,t)P(j|a)P(m|a), P(\neg r)\sum_t P(t)\sum_a P(a|\neg r,t)P(j|a)P(m|a)\rangle =$$

$$= \alpha\langle 0{,}00059224, 0{,}0014919\rangle = \langle 0{,}284, 0{,}716\rangle$$

Inferencia por enumeración

- **Las operaciones realizadas en la fórmula anterior se pueden simbolizar con el siguiente árbol**





Algoritmo de inferencia por enumeración

- **<u>Entrada</u>: una v.a. X de consulta, un conjunto de valores observados $\boldsymbol{e}$ para la variables de evidencia y una red bayesiana. <u>Salida</u>: $\boldsymbol{P}(X|\boldsymbol{e})$**

```
FUNCION INFERENCIA_ENUMERACION(X,e,RED)
1. Sea Q(X) una distribución de probabilidad sobre X, inicialmente vacía
2. PARA cada valor x_i de X HACER
   2.1 Extender e con el valor x_i para X
   2.2 Hacer Q(x_i) el resultado de ENUM_AUX(VARIABLES(RED),e,RED)
3. Devolver NORMALIZA(Q(X))

FUNCION ENUM_AUX(VARS,e,RED)
1. Si VARS es vacío devolver 1
2. Si no,
   2.1 Hacer Y igual a PRIMERO(VARS)
   2.2 Si Y tiene un valor y en e devolver P(y|padres(Y,e))·ENUM_AUX(RESTO(VARS),e)
       Si no, devolver SUMATORIO(y,P(y|padres(Y,e))·ENUM_AUX(RESTO(VARS),e_y))
       (donde: padres(Y,e) es el conjunto de valores que toman en e
               los padres de Y en la RED, y e_y extiende e con el valor y para Y)
```

Algoritmo de inferencia por enumeración

- **Observación:**
  - **Para que el algoritmo funcione, `VARIABLES(RED)` debe devolver las variables en un orden consistente con el orden implícito en el grafo de la red (de arriba hacia abajo)**
- **Recorrido en profundidad:**
  - **El algoritmo genera el árbol de operaciones anterior de arriba hacia abajo, en profundidad**
  - **Por tanto, tiene un coste lineal en espacio**
- **Puede realizar cálculos repetidos**
  - **En el ejemplo,** $P(j|a)P(m|a)$ **y** $P(j|\neg a)P(m|\neg a)$ **se calculan dos veces**
  - **Cuando hay muchas variables, estos cálculos redundantes son inaceptables en la práctica**

Evitando cálculos redundantes

- **Idea para evitar el cálculo redundante:**
  - Realizar las operaciones ***de derecha a izquierda*** (o, equivalentemente, de abajo a arriba en el árbol de operaciones)
  - Almacenar los cálculos realizados para posteriores usos
- **En lugar de multiplicar *números*, multiplicaremos *tablas de probabilidades***
  - Denominaremos ***factores*** a estas tablas
  - Por ejemplo, la operación $\boldsymbol{P}(R|j,m) = \alpha \boldsymbol{P}(R) \sum_t P(t) \sum_a \boldsymbol{P}(a|R,t) P(j|a) P(m|a)$ puede verse como la ***multiplicación*** de cinco tablas o ***factores*** en los que hay intercaladas dos operaciones de suma o ***agrupamiento***
  - Se trata de hacer esas operaciones entre factores de derecha a izquierda
  - Es el denominado algoritmo de ***eliminación de variables***
  - Veamos con más detalle cómo actuaría este algoritmo para calcular $\boldsymbol{P}(R|j,m)$

El algoritmo de eliminación de variables: un ejemplo

- **En primer lugar, tomamos un orden fijado entre las variables de la red**
  - **Un orden adecuado será esencial para la eficiencia del algoritmo (más adelante comentaremos algo más sobre el orden)**
  - **En nuestro caso, tomaremos el inverso de un orden consistente con la topología de la red:** M, J, A, T, R
- **El factor correspondiente a** M **se obtiene a partir de la distribución condicional** $\boldsymbol{P}(M|A)$
  - **Como** M **es una variable de evidencia y su valor está fijado a** $true$**, el factor correspondiente a** $\boldsymbol{P}(m|A)$**, que notamos** $\boldsymbol{f}(A)$**, es la tabla con componentes** $P(m|a)$ **y** $P(m|\neg a)$**:**

```
 A  |    f_1(A)
----------------
 T  |    0.70
 F  |    0.01
```

El algoritmo de eliminación de variables: un ejemplo

- **La siguiente variable en el orden es J**
  - **De manera análoga $\boldsymbol{f_2}(A)$ (tomado de $\boldsymbol{P}(j|A)$) es el factor correspondiente**
- **Siguiente variable: A**
  - **El factor correspondiente, notado $f_3(A,R,T)$ se obtiene a partir de $\boldsymbol{P}(A|R,T)$**
  - **Ninguna de esas variables es de evidencia, y por tanto no están fijados sus valores**
  - **Es una tabla con $2 \times 2 \times 2$, una por cada combinación de valores de R (variable de consulta) A y T (variables ocultas)**
  - **En este caso, esta tabla está directamente en la propia red**

El algoritmo de eliminación de variables: un ejemplo

- **Hasta ahora, no hemos realizado ninguna operación**
  - **Sólamente hemos construido los factores**
- **Pero A es una variable oculta, así que hemos de realizar el sumatorio sobre sus valores**
  - **Por tanto, multiplicamos <u>ahora</u> los tres factores y sumamos sobre A**
  - **La multiplicación de $\boldsymbol{f_1}$, $\boldsymbol{f_2}$ y $\boldsymbol{f_3}$, notada $\boldsymbol{f_4}(A, R, T)$ se obtiene multiplicando las entradas correspondientes a los mismos valores de A, R y T**
  - **Es decir, para cada valor v_1 de A, v_2 de R y v_3 de T se tiene** $f_4(v_1, v_2, v_3) = f_1(v_1)f_2(v_1)f_3(v_1, v_2, v_3)$
  - **Por ejemplo:** $f_4(true, false, true) = f_1(true)f_2(true)f_3(true, false, true) = 0{,}70 \times 0{,}90 \times 0{,}29 = 0{,}1827$
  - **Almacenamos $\boldsymbol{f_4}$ y nos olvidamos de $\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_2}$ y $\boldsymbol{f_3}$**
  - **Nota: aunque no es éste el caso, si alguno de los factores no tuviera a la variable A como argumento , lo conservaríamos y no participaría en la multiplicación, ni en el agrupamiento posterior**

El algoritmo de eliminación de variables: un ejemplo

- **Ahora hay que *agrupar* el valor de A en f_4 (realizar el sumatorio $\sum_a$)**
  - **Así, obtenemos una tabla $\boldsymbol{f_5}(R,T)$ haciendo $f_5(v_1,v_2) = \sum_a f_4(a,v_1,v_2)$ para cada valor v_1 de R y v_2 de T, y variando a en los posibles valores de A**
  - **Llamaremos a esta operación *agrupamiento***
  - **Hemos *eliminado* la variable A**
  - **Una vez realizada la agrupación, guardamos $\boldsymbol{f_5}$ y nos olvidamos de $\boldsymbol{f_4}$**
- **Continuamos con la siguiente variable T:**
  - **El factor correspondiente a esta variable, que notaremos $\boldsymbol{f_6}(T)$, es la tabla $\boldsymbol{P}(T)$**
- **T es una variable oculta**
  - **Por tanto, debemos multiplicar y agrupar, eliminando la variable T**
  - **Notemos por $\boldsymbol{f_7}(R)$ al resultado de multiplicar $\boldsymbol{f_6}$ por $\boldsymbol{f_5}$ y agrupar por T**
  - **Podemos olvidarnos de $\boldsymbol{f_5}$ y $\boldsymbol{f_6}$**

El algoritmo de eliminación de variables: un ejemplo

- **Ultima variable:** R
  - **El factor correspondiente a esta variable, que notaremos** $\boldsymbol{f}_8(R)$**, es la tabla** $\boldsymbol{P}(R)$
- **Para finalizar:**
  - **Multiplicamos los factores que nos quedan (**$\boldsymbol{f}_7$ **y** $\boldsymbol{f}_8$**) para obtener** $\boldsymbol{f}_9(R)$ **y normalizamos para que sus dos entradas sumen 1**
  - **La tabla finalmente devuelta es justamente la distribución** $\boldsymbol{P}(R|j.m)$

Observaciones sobre el algoritmo de eliminación de variables

- **En cada momento tenemos un conjunto de factores, que va cambiando:**
  - **Al añadir un nuevo factor, uno por cada variable que se considera**
  - **Al multiplicar factores**
  - **Al agrupar por una variable oculta**
- **Multiplicación de tablas:**
  - **Si $\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$ y $\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ son dos tablas cuyas variables en común son las de $\boldsymbol{Y}$, se define su producto $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ como la tabla cuyas entradas son $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = f_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f_2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$**
  - **Similar a una operación *join* en bases de datos, multiplicando los valores correspondientes**
- **En el algoritmo de eliminación de variables, sólo multiplicaremos tablas:**
  - **Previo a realizar cada operación de agrupamiento**
  - **Y en el paso final**

Observaciones sobre el algoritmo de eliminación de variables

- **Agrupamiento de tablas:**
  - **Dado *un conjunto de factores*, la operación de agrupar (respecto de los valores de una v.a. X) consiste en obtener *otro conjunto de factores***
  - **Se dejan igual aquellos que no tienen a la variable X entre sus argumentos**
  - **Y el resto de factores se multiplican y *se sustituyen* por el resultado multiplicarlos y sumar en la tabla por cada posible valor de X**
  - **Por ejemplo, si en el conjunto de factores $\boldsymbol{f}_1(T), \boldsymbol{f}_2(A, R, T), \boldsymbol{f}_3(A), \boldsymbol{f}_4(A)$ tuvierámos que agrupar por la variable T, dejamos $\boldsymbol{f}_3$ y $\boldsymbol{f}_4$ y sustituimos $\boldsymbol{f}_1$ y $\boldsymbol{f}_2$ por el resultado de agregar (por cada valor de T) la multiplicación de $\boldsymbol{f}_1$ y $\boldsymbol{f}_2$**
  - **La operación de sumar por un valor es similar a la *agregación* de una columna en bases de datos**

Un paso previo de optimización: variables irrelevantes

- **En el algoritmo de eliminación de variables, se suele realizar un paso previo de eliminación de variables irrelevantes para la consulta**
- **Ejemplo:**
  - **Si la consulta a la red del ejemplo es $\boldsymbol{P}(J|r)$, hay que calcular $\alpha \boldsymbol{P}(r)\sum_t P(t)\sum_a P(a|r,t)\boldsymbol{P}(J|a)\sum_m P(m|a)$**
  - **Pero $\sum_m P(m|a) = 1$, así que la variable M es irrelevante para la consulta**
  - **Siempre podemos eliminar cualquier variable que sea una hoja de la red y que no sea de consulta ni de evidencia**
  - **Y en general, se puede demostrar que toda variable que no sea antecesor (en la red) de alguna de las variables de consulta o de evidencia, es irrelevante para la consulta y por tanto *puede ser eliminada***

El algoritmo de eliminación de variables

- **<u>Entrada</u>: una v.a. X de consulta, un conjunto de valores observados $\boldsymbol{e}$ para la variables de evidencia y una red bayesiana. <u>Salida</u>: $\boldsymbol{P}(X|\boldsymbol{e})$**

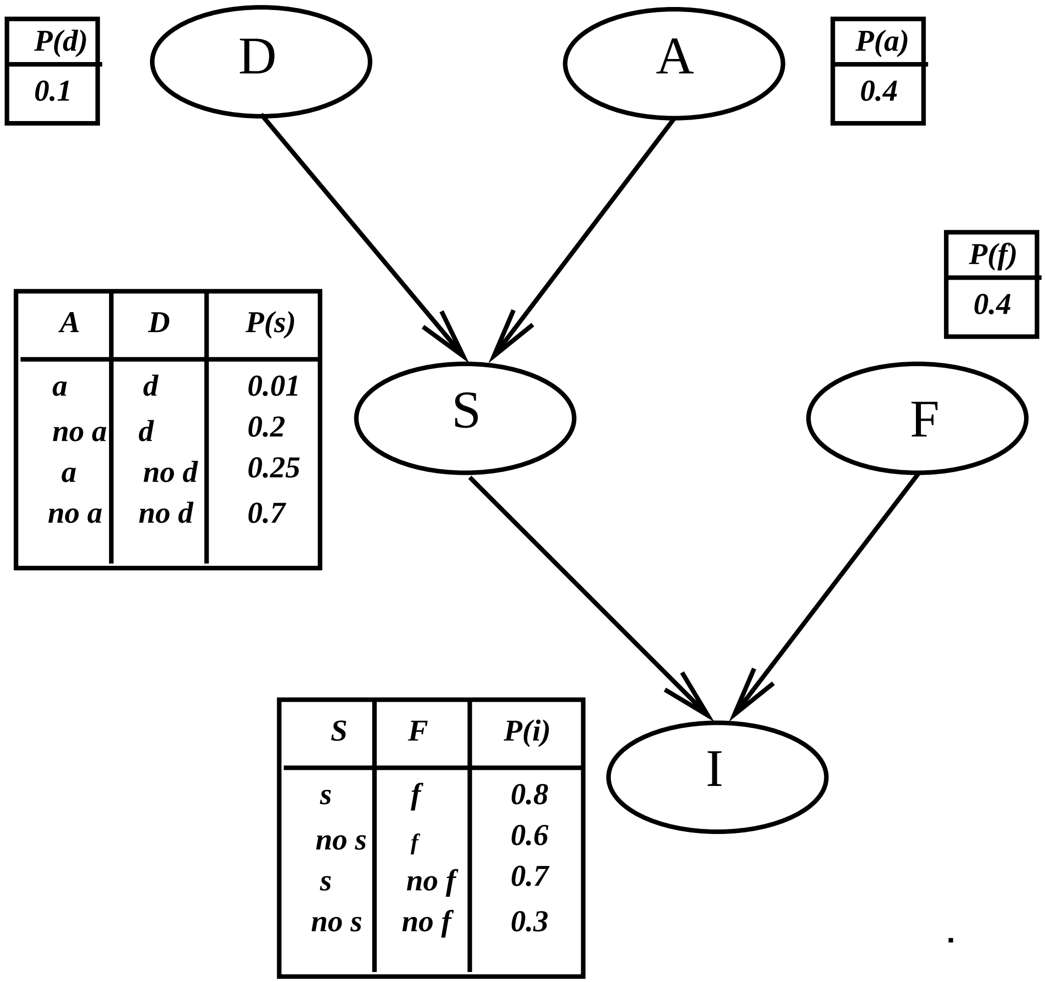
```
FUNCION INFERENCIA_ELIMINACION_VARIABLES(X,e,RED)

1. Sea RED_E el resultado de eliminar de RED las variables irrelevantes
   para la consulta realizada
2. Sea FACTORES igual a vacío
3. Sea VARIABLES el conjunto de variables de RED_E
4. Sea VAR_ORD el conjunto de VARIABLES ordenado según un orden de
   eliminación
5. PARA cada V en VAR_ORD HACER
   5.1 Sea FACTOR el factor correspondiente a VAR (respecto de e)
   5.2 Añadir FACTOR a FACTORES
   5.3 Si VAR es una variable oculta hacer FACTORES igual
       a AGRUPA(VAR,FACTORES)
6. Devolver NORMALIZA(MULTIPLICA(FACTORES))
```

Otro ejemplo (Béjar)

- **Consideremos las siguientes variables aleatorias:**
  - D: **práctica deportiva habitual**
  - A: **alimentación equilibrada**
  - S: **presión sanguínea alta**
  - F: **fumador**
  - I: **ha sufrido un infarto de miocardio**
- **Las relaciones causales y el conocimiento probabilístico asociado están reflejadas en la siguiente red bayesiana**

Otro ejemplo: red bayesiana



A	*D*	*P(s)*
a	*d*	*0.01*
no a	*d*	*0.2*
a	*no d*	*0.25*
no a	*no d*	*0.7*

S	*F*	*P(i)*
s	*f*	*0.8*
no s	*f*	*0.6*
s	*no f*	*0.7*
no s	*no f*	*0.3*

Ejemplo de inferencia probabilística

- **Podemos usar la red bayesiana para calcular la probabilidad de ser fumador si se ha sufrido un infarto y no se hace deporte, $\boldsymbol{P}(F|i, \neg d)$**
- **Directamente:**
  - **Aplicamos la fórmula:** $\boldsymbol{P}(F|i, \neg d) = \alpha \boldsymbol{P}(F, i, \neg d) = \alpha \sum_{S,A} \boldsymbol{P}(F, i, \neg d, A, S)$
  - **Factorizamos según la red:** $\boldsymbol{P}(F|i, \neg d) = \alpha \sum_{S,A} P(\neg d) P(A) P(S|\neg d, A) \boldsymbol{P}(F) \boldsymbol{P}(i|S, F)$
  - **Sacamos factor común:** $\boldsymbol{P}(F|i, \neg d) = \alpha P(\neg d) \boldsymbol{P}(F) \sum_A P(A) \sum_S P(S|\neg d, A) \boldsymbol{P}(i|S, F)$
- **Calculemos:**
  - **Para** $F = true$**:**

$$
\begin{gathered}
P(f|i, \neg d) = \alpha \cdot P(\neg d) \cdot P(f)[P(a) \cdot (P(s|\neg d, a) \cdot P(i|s, f) + P(\neg s|\neg d, a) \cdot P(i|\neg s, f)) + \\
+ P(\neg a) \cdot (P(s|\neg d, \neg a) \cdot P(i|s, f) + P(\neg s|\neg d, \neg a) \cdot P(i|\neg s, f))] = \\
= \alpha \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}4 \cdot [0{,}4 \cdot (0{,}25 \cdot 0{,}8 + 0{,}75 \cdot 0{,}6) + 0{,}6 \cdot (0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}6)] = \alpha \cdot 0{,}253
\end{gathered}
$$

  - **Análogamente, para** $F = false$**,** $P(\neg f|i, \neg d) = \alpha \cdot 0, 274$
  - **Normalizando,** $\boldsymbol{P}(F|i,\neg d) = \langle 0{,}48{,}0{,}52 \rangle$

Aplicando eliminación de variables

- **Seguiremos el siguiente orden de variables, inspirado en la topología de la red (de abajo a arriba):** I, F, S, A, D
  - **Aunque igual otro orden sería más eficiente, pero eso no lo sabemos a priori**
- **Variable** I**:**
  - **El factor** $f_I(S,F)$ **es** $\boldsymbol{P}(i|S,F)$ **(no depende de** I **ya que su valor está determinado a** i**):**

```
     S       F   |  f_{I}(S,F)=P(i|S,F)
-----------------------------------------
     s       f   |        0.8
  no s       f   |        0.6
     s    no f   |        0.7
  no s    no f   |        0.3
```

  - $FACTORES = \{f_I(S,F)\}$

Aplicando eliminación de variables

- **Variable F:**
  - **El factor $f_F(F)$ es $\boldsymbol{P}(F)$:**

```
        F   |  f_{F}(F)=P(F)
---------------------------------
        f   |        0.4
     no f   |        0.6
```

  - $FACTORES = \{f_I(S,F), f_F(F)\}$

Aplicando eliminación de variables

- **Variable S:**
  - **El factor $f_S(S, A)$ es $\boldsymbol{P}(S, |\neg d, A)$ (no depende de D ya que su valor está determinado a $\neg d$):**

```
     S       A   |  f_{S}(S,A)=P(S|no d,A)
  -----------------------------------------
     s       a   |        0.25
     s    no a   |        0.7
  no s       a   |        0.75
  no s    no a   |        0.3
```

  - $FACTORES = \{f_I(S, F), f_F(F), f_S(S, A)\}$

Aplicando eliminación de variables

- **Como S es una variable oculta, agrupamos por S**
- **Para ello, primero multiplicamos $f_I(S,F)$ y $f_S(S,A)$ obteniendo $g(S,A,F)$**

```
   S      A       F   |  g(F,A)=P(S|no d,A) x P(i|S,F)
------------------------------------------------------
   s      a       f   |    0.25 x 0.8
   s   no a       f   |    0.7 x 0.8
   s      a    no f   |    0.25 x 0.7
   s   no a    no f   |    0.7 x 0.7
no s      a       f   |    0.75 x 0.6
no s   no a       f   |    0.3 x 0.6
no s      a    no f   |    0.75 x 0.3
no s   no a    no f   |    0.3 x 0.3
```

Aplicando eliminación de variables

- **Y ahora, sumamos $g(S, A, F)$ por la variable S, obteniendo $h(A, F)$**

```
     A       F   |      h(A,F)=SUM_{S}g(S,A,F)
  ----------------------------------------------
     a       f   |    0.25 x 0.8 + 0.75 x 0.6 = 0.65
  no a       f   |    0.7 x 0.8 + 0.3 x 0.6 = 0.74
     a    no f   |    0.25 x 0.7 + 0.75 x 0.3 = 0.4
  no a    no f   |    0.7 x 0.7 + 0.3 x 0.3 = 0.58
```

  - **Acabamos de eliminar la variable S**
  - $FACTORES = \{h(A, F), f_F(F)\}$ **(nótese que $f_F(F)$ no se ha usado)**

Aplicando eliminación de variables

- **Variable A:**
  - **El factor $f_A(A)$ es $\boldsymbol{P}(A)$:**

```
        A   |  f_{A}(A)=P(A)
----------------------------------
        a   |        0.4
     no a   |        0.6
```

  - $FACTORES = \{f_A(A), h(A, F), f_F(F)\}$

Aplicando eliminación de variables

- **Como A es una variable oculta, agrupamos por A**
  - **Para ello, primero multiplicamos $f_A(A)$ y $h(A,F)$ obteniendo $k(A,F)$**

```
    A       F   |  k(F,A)=P(A) x h(A,F)
------------------------------------------------
    a       f   |    0.4 x 0.65 = 0.26
 no a       f   |    0.6 x 0.74 = 0.444
    a    no f   |    0.4 x 0.4  = 0.16
 no a    no f   |    0.6 x 0.58  = 0.348
```

  - **Y ahora, sumamos $k(A,F)$ por la variable A, obteniendo $l(F)$ (y eliminando, por tanto, la variable S)**

```
         F   |    l(F)=SUM_{A}k(A,F)
        --------------------------------
         f   |    0.26 + 0.444 = 0.704
      no f   |    0.16 + 0.348 = 0.508
```

  - $FACTORES = \{l(F), f_F(F)\}$

Aplicando eliminación de variables

- **Variable D:**
  - **Factor $f_D()$ (no depende de D, ya que su valor está fijado a $\neg d$, por tanto se trata de una tabla con una única entrada):** $0{,}9$
  - $FACTORES = \{f_D(), l(F), f_F(F)\}$
- **Ultimo paso: multiplicamos y normalizamos**
  - **Obsérvese que sólo hasta este paso hacemos uso del factor correspondiente a F**
  - **Multiplicación**

```
     F   |    m(F)=f_d() x l(F) x f_F(F)
    -------------------------------------
     f   |    0.9 x 0.704 x 0.4 = 0.253
  no f   |    0.9 x 0.508 x 0.6 = 0.274
```

  - **Normalizando obtenemos finalmente:** $\boldsymbol{P}(F|i, \neg d) = \langle 0{,}48, 0{,}52\rangle$
- **Por tanto, la probabilidad de ser fumador, dado que se ha tenido un infarto y no se hace deporte, es del 48 %**

Complejidad del algoritmo de eliminación de variables

- **La complejidad del algoritmo (tanto en tiempo como en espacio) está dominada por el tamaño del mayor factor obtenido durante el proceso**
- **Y en eso influye el orden en el que se consideren las variables (*orden de eliminación*)**
  - **Podríamos usar un criterio heurístico para elegir el orden de eliminación**
  - **En general, es conveniente moverse "desde las hojas hacia arriba" (consistentemente con la topología de la red)**
- **Si la red está *simplemente conectada* (*poliárbol*) se puede probar que la complejidad del algoritmo (en tiempo y espacio) es *lineal* en el tamaño de la red (el número de entradas en sus tablas)**
  - **Una red está simplemente conectada si hay a lo sumo un camino (no dirigido) entre cada dos nodos**

Complejidad de la inferencia exacta

- **Pero en general, el algoritmo tiene complejidad exponencial (en tiempo y espacio) en el peor de los casos**
- **Cuando la inferencia exacta se hace inviable, es esencial usar métodos aproximados de inferencia**
- **Métodos estocásticos, basados en muestreos que simulan las distribuciones de probabilidad de la red**

Aplicaciones de las redes bayesianas

- **Aplicaciones en empresas**
  - **Microsoft: *Answer Wizard (Office)*, diagnóstico de problemas de impresora,...**
  - **Intel: Diagnóstico de fallos de procesadores**
  - **HP: Diagnóstico de problemas de impresora**
  - **Nasa: Ayuda a la decisión de misiones espaciales**
- **Otras aplicaciones: diagnóstico médico, *e-learning*,...**

Bibliografía

- Russell, S. y Norvig, P. ***Inteligencia artificial (Un enfoque moderno), segunda edición*** (Prentice–Hall Hispanoamericana, 2004)
  - Cap. 14: "Razonamiento Probabilístico"